

Limites

6 questões resolvidas passo a passo

aprovei.net · Desafio Resolvido

Questão 1

Cálculo I

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

1. Substituição direta

$$\frac{\sqrt{0+1} - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Trocando x por zero: raiz de um é um, e um menos um dá zero em cima. Embaixo, zero. De novo a indeterminação — só que aqui não há trinômio para fatorar.

2. Multiplicar pelo conjugado

$$\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{x}{x \cdot (\sqrt{x+1} + 1)}$$

O truque para raiz é multiplicar em cima e embaixo pelo conjugado, que é a mesma expressão com o sinal trocado. Isso é multiplicar por um, então não muda o valor. E no numerador some a raiz: fica x mais um, menos um, ou seja, x.

3. Cancelar o x

$$\frac{x}{x \cdot (\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$$

Agora o x aparece em cima e embaixo. Como x tende a zero mas nunca chega a valer zero, podemos cancelar sem medo.

4. Substituir na expressão simplificada

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

O que sobrou é contínuo perto de zero, porque o denominador vale dois ali e não se anula. Substituindo: um sobre um mais um, que é um meio.

Resposta: $\frac{1}{2}$

Questão 2

Cálculo I

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

1. Substituição direta

$$\frac{3^3 - 27}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

Trocando x por três: três ao cubo é vinte e sete, então o numerador zera. O denominador também. Zero sobre zero não é resposta, é aviso de que precisamos de outro caminho.

2. Fatorar a diferença de cubos

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

Vinte e sete é três ao cubo, então o numerador é uma diferença de cubos. E sempre dá para fatorar no mesmo padrão: um fator com a raiz cúbica, x menos três, vezes o trinômio x ao quadrado mais três x mais nove.

3. Cancelar o fator comum

$$\frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = x^2 + 3x + 9$$

O fator x menos três aparece em cima e embaixo. Como x nunca chega a valer três, esse fator não é zero — então dá para cancelar, e sobra o trinômio.

4. Substituir na expressão simplificada

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9) = 9 + 9 + 9 = 27$$

Sobrou um polinômio, que não tem divisão nem raiz para dar problema: aqui o valor no ponto é exatamente para onde ele tende. Nove mais nove mais nove é vinte e sete.

Resposta: 27

Questão 3

Cálculo I

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

1. Substituição direta

$$\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Primeiro, tentamos o caminho direto: substituir x por dois. O numerador dá zero, e o denominador também. E zero sobre zero é uma indeterminação — não é uma resposta, é um aviso de que precisamos de outro caminho.

2. Fatorar a diferença de quadrados

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Repare no numerador: quatro é dois ao quadrado, então isso é uma diferença de quadrados. E toda diferença de quadrados dá para fatorar do mesmo jeito: a ao quadrado menos b ao quadrado vira a menos b, vezes a mais b. Aqui, x menos dois, vezes x mais dois.

3. Cancelar o fator comum

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

Agora o fator x menos dois aparece em cima e embaixo. Como x tende a dois mas nunca chega a valer dois, esse fator não é zero — e podemos cancelar.

4. Substituir na expressão simplificada

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

Sobrou x mais dois, e aqui substituir é seguro: essa expressão não tem divisão nem raiz, então o valor dela em dois é exatamente para onde ela tende. Dois mais dois é quatro.

Resposta: 4

Questão 4

Cálculo I

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}}{x}$$

1. Substituição direta

$$\frac{\frac{1}{0+2} - \frac{1}{2}}{0} = \frac{0}{0}$$

Trocando x por zero: um sobre dois menos um meio dá zero em cima, e embaixo também zero. É a indeterminação de novo, e aqui não há o que fatorar.

2. Somar as frações do numerador

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (x+2)}{2(x+2)} = \frac{-x}{2(x+2)}$$

O numerador é uma subtração de frações. Tirando o denominador comum, dois vezes x mais dois, o de cima vira dois menos a soma x mais dois — ou seja, menos x. Nesta conta é ele que vai casar com o x lá de baixo.

3. Cancelar o x

$$\frac{-x}{2(x+2)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-1}{2(x+2)}$$

Dividir por x é multiplicar por um sobre x, e agora o x aparece em cima e embaixo. Como x tende a zero mas nunca chega a valer zero, esse fator não é zero — e podemos cancelar.

4. Substituir na expressão simplificada

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(x+2)} = \frac{-1}{4}$$

Sobrou uma expressão contínua em zero, porque o denominador vale quatro ali e não se anula: nesta forma o valor no ponto é exatamente para onde ela tende. Menos um sobre quatro.

Resposta: $-\frac{1}{4}$

Questão 5

Cálculo I

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 5}$$

1. O que a substituição direta dá

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Deixando x crescer sem parar, o numerador vai para infinito e o denominador também. Infinito sobre infinito é outra indeterminação: não é resposta, é aviso de que precisamos de outro caminho.

2. Dividir tudo pela maior potência

$$\frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 5} = \frac{3 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{5}{x^2}}$$

Divida numerador e denominador pela maior potência de x que aparece, que aqui é x ao quadrado. Como x está crescendo sem parar, ele nunca vale zero, então essa divisão é legítima. Os termos de grau dois viram números, e os outros viram frações com x embaixo.

3. O que encolhe até sumir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$$

Repare no que sobrou embaixo de cada fração: quando x cresce sem parar, dois sobre x encolhe até zero, e cinco sobre x ao quadrado encolhe ainda mais rápido. Os dois somem.

4. Sobra a razão dos coeficientes

$$\frac{3 + 0}{1 - 0} = 3$$

Sobra três sobre um, que dá três. E guarde a condição: quando numerador e denominador têm o mesmo grau, o limite é a razão dos coeficientes desse grau.

Resposta: 3

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

1. Substituição direta

$$\frac{3^2 - 5 \cdot 3 + 6}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

Começamos pelo caminho direto: trocar x por três. Nove menos quinze mais seis dá zero em cima, e três menos três dá zero embaixo. Zero sobre zero não é resposta — é o aviso de que o numerador e o denominador têm um fator em comum.

2. Fatorar o trinômio

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

O numerador é um trinômio do segundo grau. Procuramos dois números que somem cinco e multipliquem seis: dois e três. Então ele se escreve como x menos dois, vezes x menos três.

3. Cancelar o fator comum

$$\frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} = x - 2$$

Agora o fator x menos três aparece em cima e embaixo. Como x tende a três mas nunca chega a valer três, esse fator nunca é zero — e só por isso podemos cancelar.

4. Substituir na expressão simplificada

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = 3 - 2 = 1$$

Sobrou x menos dois, que é uma função contínua em todo ponto. Aí sim substituímos: três menos dois é igual a um. Esse é o limite.

Resposta: 1
